



ORIGINAL RESEARCH PAPER

Catastrophe Swap Price Modeling with Random Severity

N. Mahmoudpour^{1,*}, A. Neisy², M. Peymany³, M. Amiri³

¹ Department of Financial Management, School of Accounting and Management, Allameh Tabatabai University, Tehran, Iran

² Department of Mathematics, School of Statistics, Mathematics and Computers, Allameh Tabatabai University, Tehran, Iran

³ Department of Finance and Banking, School of Management and Accounting, Allameh Tabatabai University, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article History

Received: 28 December 2018

Revised: 09 February 2019

Accepted: 09 November 2019

Keywords

*Insurance Linked Securities;
Catastrophe Swaps; Stochastic
Models; Numerical Solution.*

ABSTRACT

Objective: Presenting a model for catastrophe swap pricing based on stochastic models and numerical solution of the model.

Methodology: Descriptive, its design is retrospective, the direction of applied research and the method of collecting information is library. In this research, the "use of available information and documents" tool was used and Varans and Pilke (2009) database was used. In determining the changes in the swap price, Ito's order was followed, and Black and Schulz's generalization of the modeling method was used to reach the catastrophe swap model. A partial integral differential equation was extracted and converted to ordinary differential equations using semi-discretization and finite difference method and Euler method were used to solve the catastrophe swap pricing model. The parameters were estimated and implemented numerically based on Björk's (2009) statistical inference method, and finally, the model was implemented using MATLAB software.

Findings: A new two-factor model for damage has been presented. In other words, instead of C in Anger's model, $["Ce"]^{\lambda}$ is used and λ is considered to change randomly every moment. Therefore, from the point of view of the mathematics of probability, the intensity does not have a fixed value and follows a random geometric Brownian process, which is correlated with the damage. Also, a new model for catastrophe swap pricing has been presented, which has two integral and differential parts.

Conclusion: The catastrophe swap price has an inverse relationship with the growth of damage and the growth of damage severity. Also, the trend of the price for damage less than the threshold has a regular trend, and these changes are proportional to the changes in damage and severity.

*Corresponding Author:

Email: n_mahmoudpour@atu.ac.ir

DOI: [10.22056/ijir.2019.04.02](https://doi.org/10.22056/ijir.2019.04.02)



مدل سازی قیمت سواپ فاجعه با شدت وقوع تصادفی

نصرالله محمودپور^{۱*}، عبدالساده نیسی^۲، مسلم پیمانی فروشانی^۳، میثم امیری^۴

^۱گروه مدیریت مالی، دانشکده حسابداری و مدیریت، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

^۲گروه ریاضی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

^۳گروه مالی و بانکداری، دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

چکیده:

هدف: ارائه مدلی، برای قیمت گذاری سواپ فاجعه، بر پایه مدل های تصادفی و حل عددی مدل است. روش شناسی: توصیفی، طرح آن گذشته نگر، جهت گیری پژوهش کاربردی و روش گردآوری اطلاعات، کتابخانه ای است. در این تحقیق، از ابزار «استفاده از اطلاعات و مدارک موجود» بهره گرفته شده و از پایگاه داده ورنس و پبلیک (۲۰۰۹) استفاده شده است. در تعیین تغییرات قیمت سواپ از دستور ایتو تبعیت شده و برای رسیدن به مدل سواپ فاجعه از تعمیم روش مدل سازی بلک و شولز استفاده شده است. یک معادله دیفرانسیل انتگرال جزئی استخراج شده و با استفاده از نیمه گسسته سازی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و برای حل مدل قیمت گذاری سواپ فاجعه از روش تفاضلات متناهی و روش اویلر استفاده شده است. پارامترها براساس روش استنباط آماری بیورک (۲۰۰۹) تخمین و اجرای عددی انجام شده است و سرانجام، با استفاده از نرم افزار متلب، مدل اجرا شده است. یافته ها: یک مدل جدید دو عاملی برای خسارت ارائه شده است. به عبارتی دیگر، به جای C در مدل آنگر، از $[\lambda^a] \text{ "Ce"}$ استفاده شده و لذا طوری در نظر گرفته شده که هر لحظه، تصادفی، تغییر کند. بنابراین از دیدگاه ریاضیات احتمال، شدت مقدار ثابتی ندارد و از یک فرایند تصادفی براونی هندسی تبعیت می کند، که با خسارت هم بستگی دارد. همچنین مدل جدیدی برای قیمت گذاری سواپ فاجعه ارائه شده است که دو بخش انتگرالی و دیفرانسیلی دارد. نتیجه گیری: قیمت سواپ فاجعه با رشد خسارت و رشد شدت خسارت رابطه عکس دارد. همچنین، روند قیمت به ازای خسارت کمتر از آستانه، روند منظمی دارد و این تغییرات متناسب با تغییرات خسارت و شدت است.

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۰۷ دی ۱۳۹۷

تاریخ داوری: ۲۰ بهمن ۱۳۹۷

تاریخ پذیرش: ۱۸ آبان ۱۳۹۸

کلمات کلیدی

اوراق مرتبط با بیمه

سواپ فاجعه

مدل های تصادفی و روش حل عددی

*نویسنده مسئول:

ایمیل: n_mahmoudpour@atu.ac.ir

DOI: 10.22056/ijir.2019.04.02

مقدمه

از اوایل دهه ۱۹۹۰، شرکت‌های بیمه و بیمه‌اتکایی از ابزار مالی جدیدی برای پوشش ریسک حوادث طبیعی در بازارهای سرمایه استفاده می‌کردند. تا به امروز، معروف‌ترین ابزار جایگزین برای انتقال ریسک اوراقی است که کوپن‌های مداومی به سرمایه‌گذاران پرداخت می‌کند، مگر آنکه رویداد فاجعه‌آمیزی رخ دهد و باعث خسارت کامل یا جزئی به اصل سرمایه شود. در کنار اوراق فاجعه، مشتقات فاجعه^۱ نیز برای دستیابی به بازار سرمایه به کار برده شده‌اند. در ۱۹۹۲، هیئت تجاری شیکاگو^۲ براساس شاخص زیان خود، معامله قرارداد آتی و اختیار معامله را در بورس آغاز کرد (سویس‌ری،^۳ ۲۰۰۹). این قرارداد به سبب نبود نقدشوندگی، خیلی زود جای خود را به شاخص خسارت اموال^۴ داد. قراردادهای آتی مرتبط با وقایع فاجعه‌آمیز^۵ از سوی بورس آتی بیمه^۶ و بانک دویچه، ارائه شده است و قراردادهای مشابه در بازار بورس اروپا^۷ نیز فهرست شده است. به جز بورس آتی بیمه، بازار بورس شیکاگو و بازار بورس کالایی نیویورک نیز اختیار وقایع فاجعه‌آمیز را ارائه می‌کنند. (کامینز و ویس،^۸ ۲۰۰۹).

در این پژوهش، ابتدا نظریه‌ها و ادبیات مرتبط با سواپ فاجعه مطرح خواهد شد و پس از آن پیشینه این پژوهش را مروری خواهیم کرد. در بخش سوم روش‌شناسی تحقیق بررسی خواهد شد و در بخش چهارم براساس تحقیقات آنگر^۹ و ژو،^{۱۰} خسارت با رویکرد تصادفی مدل‌سازی می‌شود. در بخش پنجم، این فرض که قیمت سواپ تابعی از خسارت، نوسان و زمان است، مدل‌سازی سواپ فاجعه انجام می‌شود و در بخش ششم، با استفاده از روش‌های عددی تفاضلات متناهی و اویلر، معادله دیفرانسیل انتگرال جزئی مسئله حل خواهد شد. در بخش هفتم، با بهره‌گیری از مجموعه داده‌های پیلکه، پارامترها مقادیری و مدل به صورت عددی اجرا خواهد شد و سرانجام در بخش آخر، نتیجه مطالعات ارائه می‌شود.

مبانی نظری پژوهش

اوراق بهادارسازی بیمه^{۱۱} مزایای فراوانی برای بانی^{۱۲} (ناشر) اوراق فراهم می‌کند که مهم‌ترین آن‌ها بهبود سودآوری است. شرکت‌های بیمه عمر بخش‌هایی از کسب‌وکار خود را به اوراق بهادار تبدیل می‌کنند تا بازده حقوق صاحبان سهام خود را از طریق کارایی منابع بهبود دهند. شرکت‌های بیمه‌ای، از طریق فروش ریسک‌ها به سرمایه‌گذاران، نیاز خود را به نگهداری سرمایه کاهش و توانایی خود را برای ورود به کسب‌وکار جدید افزایش می‌دهند. اوراق بهادارسازی به بیمه‌گران (و بیمه‌گران اتکایی) این امکان را می‌دهد که بر عملیات بیمه‌ای، ساختاردهی، انتقال مستقیم ریسک به بازارهای (سرمایه) اوراق بدهی و نیز بهبود بازده حقوق صاحبان سهام تمرکز کنند. سرانجام بیمه‌گران (و بیمه‌گران اتکایی) در راستای افزایش تقاضا برای انتقال ریسک، باید قادر باشند تا منافع کسب‌شده خود را با سایر مشتریان سهیم شوند. اوراق قرضه عمر دارایی‌های نامشهود را به پول تبدیل می‌کنند، الزامات سرمایه‌ای قانونی را تأمین و مخاطرات فاجعه‌آمیز مثل ریسک اخلاقی را به بازار اوراق قرضه (در بازار سرمایه) منتقل می‌کنند. علاوه‌براین، اوراق بهادارسازی بیمه‌نامه‌های اموال/حوادث بخش بزرگی از مخاطرات شدید را به بازارهای اوراق بدهی منتقل می‌کند. اوراق قرضه بلایای طبیعی، که در اصل همان اوراق بهادارسازی بیمه‌نامه‌های اموال/حوادث و به منزله منشأ ایجاد ظرفیت بیمه‌گران (و بیمه‌گران اتکایی) است، مزایای متعددی برای آن‌ها فراهم می‌کند (عسکری فیروز حایی و سادوند، ۱۳۹۳).

قرارداد سواپ، که به قرارداد معاوضه و تاخت نیز معروف است، در لغت به معنای معامله پایاپای، عوض کردن، مبادله کردن، جانشین کردن و در اصطلاح، یکی از انواع قراردادهای مشتقه است که به منظور مدیریت ریسک بین دو طرف منعقد می‌شود. براساس این قرارداد، یکی از دو طرف متعهد به پرداخت جریان نقدی^{۱۳} با نرخ شناور^{۱۴} و طرف دیگر متعهد به پرداخت نقدی با نرخ ثابت^{۱۵} در تاریخ‌های مشخصی به طرف مقابل می‌شود. به عبارت دیگر، قرارداد سواپ نوعی ابزار مشتقه است که در آن یک طرف قرارداد به معاوضه عواید ناشی از ابزار مالی خود با

^۱ Catastrophe Derivatives

^۲ Chicago Board of Trade (CBOT)

^۳ Swiss Re

^۴ Property Claim Services (PCS)

^۵ Event-Linked Futures (ELFs)

^۶ Insurance Futures Exchange (IFEX)

^۷ European Exchange (EUREX)

^۸ Cummins & Weiss

^۹ Unger

^{۱۰} Xu

^{۱۱} Insurance Securitization

^{۱۲} Originator

^{۱۳} Cash Flows

^{۱۴} Floating Rate

^{۱۵} Fixed Rate

عواید ناشی از ابزار مالی طرف مقابل اقدام می کند (نیسی و سلمانی قرائی، ۱۳۹۷).

طراحی قرارداد^۱

سواپ حوادث فاجعه ایزاری مالی است که از طریق آن ریسک حوادث طبیعی بین طرفین قرارداد تقسیم می شود. در قرارداد معمولی، خریدار حمایت (پرداخت کننده ثابت/ فروشنده سواپ) با پرداخت حق بیمه دوره ای به فروشنده حمایت (پرداخت کننده متغیر/ خریدار سواپ)، در مقابل پرداخت جبرانی از پیش مشخص شده،^۲ مشروط بر وقوع آغازگر در منطقه تحت پوشش، موافقت می کند.

مهم ترین مشخصه سواپ فاجعه این است که زبان های مرجع ناشی از بلایای طبیعی مختلف، با هم جمع نمی شوند و جداگانه دنبال می شوند. سواپ های فاجعه معمولاً دو نوع آستانه ارائه می کنند: یک آستانه رویداد و یک آستانه شتاب.^۳ اگر در طول مدت قرارداد، زیان نهایی برای یک فاجعه مرجع به آستانه رویداد برسد، نتیجه آن پرداخت فوری به خریدار حمایت و متعاقب آن انقضای قرارداد است. مشابه آن، در یک قرارداد سواپ، زمانی که زیان موقت بیش از آستانه شتاب باشد، پرداخت بلافاصله آغاز می شود و در نهایت، چنانچه زیان موقت مساوی یا بالاتر از آستانه رویداد باشد، خریدار حمایت بازده را در سررسید دریافت خواهد کرد.

توسعه بازار

هرچند بحث درباره اوراق بلایای طبیعی و مشتقات بیمه به مدت دو دهه مطرح بوده است، اما بازار برای سواپ های فاجعه هنوز بسیار جوان است و به خاطر ویژگی فرابورس بودن آن، اطلاعات در خصوص معاملات، مبتنی بر نقل قول است (کامینز و ویس، ۲۰۰۹). همچنین متخصصان صنعت گفته اند که اندازه بازار به سرعت رو به افزایش است (کامینز، ۲۰۰۸) و مجمع جهانی اقتصاد در سال ۲۰۰۸، برآورد کرد که سواپ های فاجعه همراه با ضمانت های زیان صنعت،^۴ ارزشی فرضی حدود ۱۰ میلیارد دلار دارند. در ماه مه ۲۰۰۹، انجمن بین المللی سواپ و مشتقات^۵ الگوی مستندی برای معاملات سواپ فاجعه براساس حوادث طوفان آمریکا منتشر کرد. هدف از انجام این کار، تعریف استاندارد برای اصطلاحات کلیدی، کاهش عدم قطعیت، بهبود نقدشوندگی، شفافیت و تشویق رشد در بازار بود.

حوزه های کاربرد^۶

با فرض بدون آربیتراژ بودن، سواپ فاجعه باید مشابه اوراق قرضه فاجعه عمل کند؛ یعنی سرمایه گذاران باید دارایی خود را با بازده نسبتاً بالا و هم بستگی جزئی بازده با سایر طبقات دارایی به اشتراک بگذارند. در نتیجه، از نظر سرمایه گذار، سواپ حوادث فاجعه روش جذابی برای در معرض ریسک وقایع طبیعی قرار گرفتن، بدون نیاز به منابع مالی برای خرید اوراق قرضه بلایای طبیعی، است. علاوه بر این، نیازی نیست که خریدار پوشش قرارداد بیمه مکاتب داشته باشد و نیز فروشنده پوشش نیازی ندارد که در موقعیت شرکت بیمه سازمان یافته باشد تا واجد شرایط

^۱. Contract Design

^۲. میزان پرداخت جبرانی به شکل خطی با میزان زیان افزایش می یابد، اگرچه در محدوده بین آستانه رویداد (Event threshold) و زیان کامل در نوسان است.

^۳. Acceleration Threshold

^۴. Cummins

^۵. Industry Loss Warranty (ILWs): اوراق تضمین زیان صنعت (یا به عبارت دیگر اوراق تضمین زیان بازار) یکی از قدیمی ترین اوراق پوشش ریسک است که در سال ۱۹۸۱ با هدف حمایت و پشتیبانی از صنعت بیمه و بیمه اتکایی در مقابل زیان های شدید ناشی از حوادث فاجعه آمیز معرفی شده اند. فرایند فوق به این صورت است که شرکت های بیمه ای و بیمه اتکایی در جایگاه خریدار این اوراق وجهی را پرداخت می کنند و در مقابل، فروشنده تضمین می کند که مطابق با شاخص های تعیین شده در قرارداد این اوراق، هرگاه زیان صنعت بیمه در اثر یک حادثه فاجعه آمیز از حدی بیشتر شود، مبلغ زیان تعیین شده در قرارداد را پرداخت خواهد کرد، صرف نظر از این که زیان خریدار این اوراق چقدر است. این اوراق عمر بسیار کوتاه مدتی در حدود ۱ تا ۱/۵ سال دارند.

^۶. International Swaps and Derivatives Association (ISDA)

^۷. Areas of Application

طرف معامله سواپ قرار گیرد. از این رو سواپ فاجعه، جدا از پوشش ریسک بیمه، برای مقاصد سرمایه‌گذاری نیز به کار می‌رود. نمونه آن مبادلات پایه منفی^۱ بین سواپ‌ها و اوراق قرضه فاجعه است. این استراتژی ریسک آربیتراژ متداول در بازار اعتباری در پی بررسی اختلاف قیمت میان ابزار مشتقه و پول نقد است. اگر قیمت ورقه قرضه فاجعه به‌طور معنی‌داری از قیمت سواپ فاجعه بزرگ‌تر باشد، مثلاً اگر پایه منفی باشد، کار مثبت خرید هم‌زمان ورقه قرضه و خرید سواپ فاجعه است. بنابراین وقوع رویداد باید شروع استفاده از هر دو ابزار باشد، تا زیان اوراق (حداقل بخشی از آن) با دریافت از محل سواپ، جبران شود (براون،^۲ ۲۰۱۱).

زمینه دیگر کاربرد سواپ فاجعه، تعهد بدهی وثیقه‌دار ترکیبی^۳ در ریسک فجایع است. تعهد بدهی وثیقه‌دار تبدیل کردن مجموعه‌ای از دارایی‌ها به اوراق بهادار است. این دارایی‌ها را نهاد واسط خریداری و نگهداری می‌کند و برای تأمین مالی معامله از طریق صدور اوراق بهادار طبقه‌بندی شده با نرخ‌های مختلف اقدام می‌کند. در نقطه مقابل فروش واقعی با ساختار تعهدی بدهی وثیقه‌دار نقد، بدهی وثیقه‌دار ترکیبی قرار دارد که البته انتقال فیزیکی دارایی نیست، بلکه نهاد واسط با فروش پوشش، تحت قرارداد سواپ، ریسک را پوشش می‌دهد. درحالی که ریسک هنگفتی به بیمه‌گران یا بیمه انکایی تحمیل می‌شود، تعهد بدهی وثیقه‌دار ترکیبی فاجعه، سرمایه‌گذاران را برای دریافت موقعیتی از پورتفولیوی متنوع ریسک وقایع طبیعی، با انتخاب یک برش^۴ که با ریسک خاص آن‌ها متناسب است، توانمند می‌سازد (فارستر،^۵ ۲۰۰۸).

مقایسه سواپ فاجعه با دیگر ابزارهای انتقال ریسک

سواپ فاجعه در گروه «ابزارهای بدون ریسک مبنا» نیست، ولی از نظر اقتصادی بسیار شبیه اوراق تضمین زیان صنعت است. سواپ‌ها موضوع عدم تقارن اطلاعاتی و ریسک اخلاقی و همچنین نیازمند روند فشرده بیمه‌گری نیستند؛ بنابراین جایگزینی مقرون‌به‌صرفه برای قراردادهای بیمه انکایی سنتی‌اند. سواپ‌های فاجعه بسیار شبیه اوراق تضمین زیان صنعت و اکثر اوراق قرضه فاجعه‌اند و خریداران حمایت را در معرض ریسک مبنا قرار می‌دهند، البته اگر فقط یک بخش از پرتفوی قرارداد بیمه تعهدات، پوشش داده شود. ریسک مبنا زمانی به‌وجود می‌آید که شاخص صنعت با زبانی که بیمه‌گر (انکایی) در کسب‌وکار خود تجربه کرده و متحمل شده است، کاملاً هم‌بسته نباشند. سواپ‌های حوادث کاملاً استانداردند و از پیچیدگی‌های ساختاری و هزینه‌های مرتبط با اوراق بهادارسازی بیمه، مانند راه‌اندازی نهاد واسط و ورود به یک سواپ نرخ بازده کل، جلوگیری می‌کنند. از این رو از نظر شرکت بیمه (انکایی) آغاز آن‌ها آسان است و سریع‌تر از معامله اوراق قرضه فاجعه اجرا می‌شوند. در مقایسه با اوراق تضمین زیان صنعت، سواپ‌های فاجعه، پتانسیل بیشتری برای نقدشوندگی دارند، خصوصاً زمانی که بازار کاملاً افت کرده است. سواپ‌ها، عموماً، معاملات بدون تأمین مالی هستند و نیازی به وثیقه کردن کامل آن‌ها نیست. در جدول ۱ نکات اصلی این مقایسه آمده است.

^۱ Negative Basis: پایه در تعریف سنتی به معنای تفاوت بین قیمت نقدی یک کالا و قیمت مشتقه آن است. این مفهوم در مورد مشتقات اعتباری هم صادق است، جایی که پایه تفاوت در دامنه قیمت بین سواپ نکول اعتباری و اوراق قرضه منتشرشده برای همان بدهی، اما با سررسید متفاوت را شامل می‌شود. در بازار مشتقات اعتباری پایه می‌تواند مثبت یا منفی باشد. معنی پایه منفی این است که دامنه قیمت سواپ نکول اعتباری کوچک‌تر از دامنه قیمت اوراق قرضه است (Investopedia).

^۲ Braun

^۳ Collateralized Debt Obligation (CDO): تعهدات بدهی وثیقه‌دار، اوراق بدهی‌اند که به پشتوانه پرتفویی از اوراق بدهی دیگر منتشر می‌شوند. چنانچه تعهدات پایه CDO، عمدتاً از جنس اوراق قرضه باشند CBO، چنانچه عمدتاً از جنس وام باشند CLO و چنانچه از جنس وام‌های رهنی تشکیل شده باشند CMO نامیده می‌شوند. این ابزارها به بانک‌ها این امکان را می‌دهند که به پشتوانه وام‌هایی که در دارایی خود دارند، اوراق منتشر کنند. تعهدات بدهی وثیقه‌دار را می‌توان با رتبه‌های مختلف اعتباری منتشر کرد. از برش‌ها برای این منظور استفاده می‌شود. در صورت نکول بدهکاران بابت وام‌های رهنی پشتوانه اوراق، اولویت اول متعلق به صاحبان اوراق برش اول است که بالاترین رتبه اعتباری را دارند و مابقی جریان نقدی به برش‌های بعدی می‌رسد. نرخ بازدهی موردانتظار برش‌های با اولویت بالا، کمتر از برش‌های با اولویت پایین‌تر است.

^۴ Tranche

^۵ Forrester

جدول ۱: مقایسه سواب فاجعه با اوراق قرضه فاجعه، قراردادهای بیمه اتکایی و اوراق تضمین زیان صنعت

نکات اصلی	سوابهای فاجعه	اوراق تضمین زیان صنعت	اوراق قرضه فاجعه	قراردادهای بیمه اتکایی
آغازگرها	شاخص صنعت	دو شروع کننده: شاخص صنعت و جبران خسارت	برمبنای جبران خسارت شاخص صنعت کاملاً پارامتری شاخص پارامتری	جبران خسارت محور
ریسک اخلاقی	ندارد	پایین	ندارد (اگر آغازگر شاخص خاص باشد)	بالا
ریسک مینا	بالا	بالا	ندارد (اگر آغازگر جبران خسارت خالص باشد)	هیچ
استانداردسازی	خیلی بالا	بالا	پایین	پایین
هزینه معاملات	پایین	پایین	بالا	بالا
ریسک نکول طرف مقابل	وثیقه جزئی	امکان وثیقه	وثیقه کم	امکان وثیقه
روش حسابداری	ابزار مالی	بیمه اتکایی	براساس آغازگر	بیمه اتکایی

منبع: براون، ۲۰۱۱

سواب حوادث از ابزارهای نوین مالی است که در سطح جهان چندان توجه محققان را به خود جلب نکرده است و در ایران نیز کار منتشرشده‌ای در مورد آن مشاهده نشده است. با توجه به فقر شدید بازار سرمایه کشور در تنوع ابزارهای مالی نوین، نیاز شدید سرمایه‌گذاران با سلیقه‌های متفاوت به محصولات جدید برای متنوع نمودن پرتفوی خود و ضرورت تأمین مالی مناسب و کاهش ریسک اعتباری بازار بیمه با انتشار اوراق بهادار بیمه‌ای، پژوهش و تحقیق در این حوزه می‌تواند دستاوردهای نظری و کاربردی مناسبی برای بازارهای مالی کشور به همراه داشته باشد. ارائه مدلی برای قیمت‌گذاری اوراق فاجعه، زمینه را برای مطالعات اوراق فاجعه از جنبه‌های حقوقی و فقهی و... فراهم خواهد کرد.

مروری بر پیشینه پژوهش

در بررسی‌های انجام‌شده، مقاله‌ای در حوزه پژوهش در قیمت‌گذاری سواب فاجعه مشاهده نشد. فقط شماری از محققان اشاره اولیه‌ای به سواب حوادث فاجعه کرده‌اند، از جمله در آثار بوردن و سارکار^۱ (۱۹۹۶)، و کانتر و همکاران^۲ (۱۹۹۷)، به این ابزار در اوراق بیمه اشاره شده است. همچنین کامینز (۲۰۰۸)، و کامینز و ویس (۲۰۰۹)، به اختصار سازوکار عمومی قرارداد سوابهای فاجعه را توصیف کرده‌اند. ساختار پیشینه مطالعه در این بررسی، تحلیلی است و براساس سه اصل نظری مختلف ارائه شده است: (۱) بررسی تجربی قیمت‌های اوراق قرضه بلایای طبیعی؛ (۲) روش‌های مبتنی بر مطلوبیت؛ (۳) چارچوب بدون آربیتراژ. براساس بررسی تجربی قیمت‌های اوراق قرضه بلایای طبیعی، لین^۳ (۲۰۰۰)، و لین و ماول^۴ (۲۰۰۸)، از روش‌شناسی قیمت‌گذاری آماری استفاده کردند و به شباهت ابزار بازار سرمایه فاجعه با بیمه اتکای سنتی اشاره کردند. روش‌های مبتنی بر مطلوبیت حول این مفهوم متمرکز شده‌اند که بازارهای بیمه عموماً ناقص و ناکامل‌اند، به این معنا که نمی‌توان اندازه مارتینگل متناظر منحصربه‌فردی را یافت و از طریق آن فرصت‌های آربیتراژ را مشخص کرد. بر این اساس، آسه^۵ (۲۰۰۱) با اصلاح تحقیقات نخستین خود، مدل مارکوف را برای پویایی‌های پایه در قیمت‌گذاری مشتقات بلایای طبیعی به کار برد و روش تعادل رقابتی را پیشنهاد کرد که ریسک‌گریزی نسبی مداوم را ارائه می‌کند. یانگ^۶ (۲۰۰۴)، قیمت بی‌تفاوتی اوراق قرضه بلایای طبیعی را براساس رجحان مطلوبیت‌نمایی سرمایه‌گذاران محاسبه کرد و اگامی و یانگ^۷ (۲۰۰۸)، قیمت‌گذاری مبتنی بر مطلوبیت اوراق قرضه بلایای طبیعی را بررسی کردند. همچنین

^۱. Borden & Sarkar

^۲. Canter et al.

^۳. Lane

^۴. Lane & Mahul

^۵. Aase

^۶. Young

^۷. Egami & Young

دیکمان^۱ (۲۰۰۹)، مانند پژوهش کمبل و کاکرن^۲ (۱۹۹۹)، مدل پویا و متعادل اوراق قرضه بلایای طبیعی را با روند بیرونی ارائه کرد. اما بیشتر مقالات قیمت گذاری مشتقات و اوراق قرضه بلایای طبیعی، چارچوب آزاد از آربیتراژ یا بدون آربیتراژ را مطرح کرده‌اند. کامینز و جمن^۳ (۱۹۹۴، ۱۹۹۵)، دامنه‌های خرید و آتی بلایای طبیعی را با روش اختیار آسیایی، که در آن فرایند پرش انتشاری با نوسان پرش مداوم مفروض است، قیمت گذاری کردند. همچنین، چانگ و همکاران^۴ (۱۹۹۶)، مدل اختیار بلایای طبیعی را بر تغییر زمان تصادفی مرتبط با تراکنش آتی بیمه، توسعه دادند. این کار سبب شد که فرایند پواسن مرکب را به فرایند انتشاری خالص تبدیل کنند و ارزش گذاری ریسک خنثای آن به راحتی اجرایی شود. نیز می‌توان فرمول بسته خلاصه شده آن را به دست آورد. همین‌طور، جمن و یور^۵ (۱۹۹۷)، با استفاده از تغییر زمان تصادفی و تبدیل لاپلاس، راه‌حلی نیمه تحلیلی برای قیمت اختیارات بلایای طبیعی روی شاخص زیان، که فرایند پرش انتشاری را دنبال می‌کند، ارائه دادند، اما لی و یو^۶ (۲۰۰۷)، بینش حاصل از کار نخستین خود را در اوراق قرضه بلایای طبیعی در قراردادهای بیمه اتکایی به کار بردند و بیاجینی و همکاران^۷ (۲۰۰۸)، از تبدیل فوریه^۸ برای استنتاج راه‌حلی تحلیلی برای قیمت گذاری اختیار در وقوع بلایای طبیعی و دوره توسعه خسارت بهره بردند. میورمان^۹ (۲۰۰۸)، مدل اختیار خرید بلایای طبیعی را بر فرایند پواسن مرکب برای شاخص خسارت پایه به کار برد تا قیمت بازار ریسک بیمه را از مطنه مبادله مشتقات بلایای طبیعی استخراج کند. چانگ و همکاران (۲۰۰۸؛ ۲۰۱۰)، چارچوب مفهومی خود را از یک زمان پیوسته بازار کامل به یک زمان گسسته بازار ناقص، برای اختیارات بلایای طبیعی سبک آسیایی با مدل دوجمله‌ای مرکب، تعمیم دادند و شدت فرایند پواسن تصادفی را از طریق روند معکوس میانگین اورنشتین- اولنیک^{۱۰} بررسی کردند. هاردل و کابررا^{۱۱} (۲۰۱۰)، اوراق قرضه بلایای طبیعی مرکب را برای زلزله قیمت گذاری کردند و فرایند پواسن تصادفی مرکب را برای جریان وقایع طبیعی فرض قرار دادند. وو و چانگ^{۱۲} (۲۰۱۰)، از فرایند پواسن تصادفی مرکب، با شدت اورنشتین- اولنیک در ترکیب با مدل کاکس^{۱۳} (۱۹۸۵)، برای نرخ بهره و چارچوب جارو و یو^{۱۴} (۲۰۰۱)، برای ریسک نکول متقابل در جهت قیمت گذاری اوراق فاجعه و اختیار، بهره گرفتند. مطالعات متنوعی پیرامون مدل سازی خسارت انجام شده است؛ از جمله مطالعات در این زمینه می‌توان به پایان نامه ژو اشاره کرد. او در پژوهش خود به بررسی توزیع خسارات ناشی از وقایع طبیعی در نروژ پرداخت. در همین راستا، ذوالفقاری و کمبل با استفاده از داده‌های تاریخی، تحلیلی برای مدل خسارت زلزله و ویکری و همکاران^{۱۵} (۲۰۰۶)، مدلی برای خسارت گردباد HAZUS-MH مطرح کردند.

روش‌شناسی پژوهش

روش تحقیق این پژوهش توصیفی است و از آنجا که یک متغیر (فاجعه یا حادثه) در طول زمان اندازه‌گیری می‌شود، مطالعه‌ای توصیفی طولی انجام می‌گیرد. این نوع تحقیق مبتنی بر نظریه یا نتایج تحقیقات است و روش گردآوری اطلاعات روش کتابخانه‌ای است. با عنایت به اینکه داده‌های گردآوری شده با رویدادهایی مرتبطاند که در گذشته رخ داده، طرح تحقیق را می‌توان گذشته‌نگر تلقی کرد و با توجه به اینکه تحقیق در پی یافتن راه‌حل برای مسئله‌ای است که می‌تواند در تصمیم‌گیری‌ها استفاده شود، می‌توان آن را تصمیم‌گرا یا کاربردی نامید. در این تحقیق ابزار «استفاده از اطلاعات و مدارک موجود» به کار گرفته شده و به علت وجودداشتن داده‌های واقعی زیان‌های اقتصادی زلزله در ایران، از پایگاه داده ورناس و پبلکه^{۱۶} (۲۰۰۹)، استفاده شده است. ایشان در کارهای تجربی اخیر خود، برآورد خسارت اقتصادی از تمامی زلزله‌ها اخیر آمریکا در سال‌های ۱۹۰۰ تا ۲۰۰۵ را براساس شاخص‌های تورم، ثروت و جمعیت نرمال کردند، بنابراین کل خسارت‌های حاصل از زلزله

1. Dieckmann
2. Campbell & Cochrane
3. Cummins & Geman
4. Chang et al.
5. Geman & Yor
6. Lee & Yu
7. Biagini et al.
8. Fourier Transform
9. Muermann
10. Ornstein-Uhlenbeck
11. Härdle & Cabrera
12. Wu & Chung
13. Cox
14. Jarrow & Yu
15. Vickery et al.
16. Vranes & Pielke

در بازه زمانی فوق مدنظر است.

وقوع فاجعه و خسارت در حکم فرایند تصادفی پرش انتشار دو عاملی است که عامل دوم آن λ است و تغییرات آن از یک حرکت براونی هندسی تبعیت می کند. در تعیین تغییرات قیمت سواپ از دستور ایتو تبعیت شده و برای رسیدن به مدل سواپ فاجعه از تعمیم روش مدل سازی بلک و شولز استفاده شده است. یک معادله دیفرانسیل انتگرال جزئی استخراج و با استفاده از نیمه گسسته سازی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. همچنین برای حل مدل قیمت گذاری سواپ فاجعه از روش تفاضلات متناهی و روش اویلر استفاده شده است. برای سادگی و درک بهتر نتایج عددی، نسبتی بین داده ها در بازه $[0,10]$ برقرار شده و پارامترها براساس روش استنباط آماری کتاب بیورک^۱ (۲۰۰۹)، تخمین زده شده و اجرای عددی انجام شده و سرانجام مدل با استفاده از نرم افزار متلب اجرا شده است.

مدل سازی خسارت

با در نظر گرفتن مفروضات و سیاست های گفته شده، در این پژوهش، مدل خسارت باید تغییرات کوچک و پرش های بزرگ را اندازه گیری کند، لذا مدل تصادفی زیر را در نظر می گیریم:

$$DS = \alpha SDT + \sigma SDW + \eta CDN \quad (1)$$

که در آن α نرخ رشد خسارت، نوسانات کوچک (وجود یا وجودنداشتن خسارت کوچک) یا انحراف از معیار و جمله پرش ناشی از حوادث و بحران های بزرگ است. مدل فوق توسط آنگر (۲۰۱۰) معرفی شده و روی داده های مالی پی اس سی پیاده سازی شده است. این پژوهش درصدد طراحی مدلی برای خسارت است که نوسان خسارت (λ) در آن تصادفی باشد و در مدل اصلی خسارت وجود داشته باشد. به این منظور، از مدل معرفی شده آنگر در رابطه^۱، الگوبرداری و مدل تصادفی دیگری معرفی می شود. درواقع با رشد جامعه (صنایع، امکانات توریستی، محل سکونت و غیره)، خسارت اقتصادی^۲ ناشی از اموال بیمه شده افزایش خواهد یافت؛ بنابراین رابطه نزدیک و مستقیمی بین میزان خسارت و رشد جامعه وجود دارد. این نرخ رشد خسارت با α نشان داده می شود. ممکن است رخدادهایی به وجود بیاید که موجب انحراف از مقدار موردنظر α شود، که در این صورت این نوسان به شکل σ در مدل خسارت نشان داده می شود. همچنین فجایع طبیعی به صورت $ce^{\lambda} \eta$ فرض می شود، چراکه با این فرض مؤلفه پرش پویایی بیشتری دارد و تغییرات شدت وقوع مستقیماً در خسارت اثر می گذارد. از این رو مدل خسارت به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} pdt &= dw_t^1 dw_t^2 \\ ds &= \alpha s dt + \sigma s dw_t^1 + ce^{\lambda} \eta dN \\ d\lambda &= \mu \lambda dt + \gamma \lambda dw_t^2 \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن μ نرخ جابه جایی λ ، γ نوسان λ و w_t^1 و w_t^2 فرایندهای تصادفی وینر و N یک فرایند پواسن است. مدل جدید معرفی شده در این مقاله، یک مدل دوفاکتوره برای خسارت است. در واقع هدف از ارائه این مدل جدید، دخالت مستقیم شدت و احتمال وقوع خسارت در مقدار خسارت است.

مدل سازی سواپ فاجعه

نمونه واقعی قرارداد سواپ فاجعه در بازار، سواپ زیان رویداد^۳ بانک دویچه است. بانک دویچه در سال ۲۰۰۶ اعلام کرد که سواپ زیان رویداد، که یک قرارداد مشتقه جدید برای حمایت از مشتریان در مقابل زیان های ناشی از بلایای طبیعی سیل و زلزله در آمریکاست، را آغاز کرده است. قراردادهای سواپ زیان رویداد زمانی شروع به پرداخت می کنند که زیان های بیمه شدگان از رویدادهای سیل و زلزله، جداگانه، از سطح آستانه فراتر رود. این حد را مؤسسات مستقل تعیین خواهند کرد. بانک این محصول را برای پوشش ریسک و توسعه سرمایه گذاری، برای مشتریان در بخش های اموال و فاجعه، شامل شرکت های بیمه اتکایی و سرمایه گذاران بازار سرمایه، جایگزین کرده است و بازاری دو طرفه را در این نوع قرارداد به وجود آورده و قیمت های منظمی را برای خرید و فروش حمایت سواپ زیان رویداد در شرایط استاندارد، تعیین کرده است. کارکرد سواپ زیان رویداد شبیه سواپ نکول اعتباری است. خریدار حمایت یک سری پرداخت های دوره ای منظم را بر مبنای ارزش فرضی

¹. Bjork

^۲. منظور از خسارت های اقتصادی زیان های مالی ناشی از آسیب یا تخریب ساختمان های مسکونی، اداری و تجاری و همچنین زیرساخت ها و اموال است.

³. Event Loss Swaps

قرارداد انجام می‌دهد، در مقابل، چنانچه فاجعه سیل و زلزله رخ دهد و گزارش زیان به آستانه قرارداد برسد، دریافت جبرانی خواهد داشت. در این نوع قرارداد فروشنده حمایت، که مبلغ دوره‌ای ثابتی دریافت می‌کند، مجبور به پرداخت به خریدار حمایت در زمان ایجاد فاجعه براساس شرایط قرارداد است. قرارداد برای رویدادهای باد، شامل گردباد و طوفان، از سطح آستانه ۲۰ میلیارد، ۳۰ میلیارد و ۵۰ میلیارد دلار آمریکا و برای رویداد زلزله از سطح آستانه ۱۰ میلیارد و ۱۵ میلیارد دلار قابل اجرا می‌شود.

ابزار سوپ زیان رویداد یک محصول نوآورانه و جدید برای پوشش ریسک است و به مشتریانی که یک پوشش را برای بلایای طبیعی در کوتاه‌مدت جستجو می‌کنند، پیشنهاد می‌شود و سطح مقبولی از استانداردسازی، شفافیت و نقدشوندگی را، که قبلاً در بازار در دسترس نبود، به سرمایه‌گذاران ارائه می‌کند. این قرارداد ابزار مهمی است که می‌توان به مشتریان برای مدیریت ریسک پیشنهاد کرد و گزینه‌های زیادی را برای حل سفرهای مشکلات مشتریان با نیازهای مختلف ارائه می‌کند. این قراردادها برای دوره‌های استاندارد یک‌ساله، با میزان فرضی ۵ میلیون دلار و با استفاده از مستندات و معیارهای انجمن بین‌المللی مشتقات و سوپ‌ها، ارائه می‌شود. پنجاه ایالت آمریکا تحت پوشش این قراردادند. در زمانی که ارزیابی زیان مستقل برای تعیین زیان فاجعه در جریان است، چنانچه زمان قرارداد منقضی شود، قرارداد تا زمان ارائه گزارش نهایی، تمدید خواهد شد (بانک دویچه، ۲۰۰۶).

سویس‌ری (۲۰۰۹)، قراردادهای استاندارد دیگری تحت عنوان سوپ‌های فاجعه طبیعی^۱ برای حوادث طوفان و زلزله آمریکا ارائه کرد که در آن‌ها بخش اداره خدمات بیمه ادعای مالکیت در جایگاه گزارشگر زیان عمل می‌کند. این نهاد به شبکه‌ای از نمایندگان صنعت، دپارتمان‌های ادعای خسارت و تعدیلگران، نمایندگان بیمه، هواشناسان و مقامات دولتی، دسترسی دارد.

طراحی دیگری برای قراردادهای سوپ، قالبی معاملاتی است که سوپ ریسک خالص یا سوپ پرتفوی^۲ نامیده می‌شود. در سوپ ریسک خالص، دو شرکت بیمه یا بیمه اتکایی، پوشش‌های در معرض ریسک غیرمرتبط خود را، با هدف توسعه تنوع پرتفوی و کاهش الزامات ناظر بر سرمایه، معاوضه می‌کنند. بدین‌وسیله شرکت‌های بیمه‌گر که کسب‌وکارهای محلی خود را که در یک منطقه متمرکز کرده‌اند و مستعد پذیرش بلایای طبیعی آن منطقه‌اند، می‌توانند ریسک‌های اصلی خود را با خطرات دیگری که ارتباط مستقیم به پرتفوی آن‌ها ندارد، منتقل کنند. معاوضه ریسک می‌تواند از طریق واسطه‌ها، وبگاه بورس ریسک فاجعه^۳ یا مستقیماً از طریق بازار خارج از بورس اجرا شود. همانند قراردادهای سوپ فاجعه استاندارد، این نوع قراردادها معمولاً به‌گونه‌ای تنظیم می‌شوند که ارزش فعلی دو نوع سوپ دقیقاً برابر باشد. در ضمن هیچ مبلغی بین طرفین مبادله نمی‌شود و در عوض، فقط زمانی که واقعه واجد شرایط قرارداد ایجاد شود مبالغ جابه‌جا می‌شوند. این کار نیازمند هم‌گرایی آغازگرها و همچنین مدل‌سازی ریسک دقیق به‌منظور تطبیق زیان‌های پیش‌بینی‌شده از طریق احتساب شرایط و وضعیت قراردادهاست. مثال معروفی در مورد این نوع سوپ، در سال ۲۰۰۳، معاوضه ریسک طوفان ۱۰۰ میلیون دلاری ژاپن از طریق شرکت بیمه میتسویی سومیتومو^۴ با طوفان ۵۰ میلیون دلاری آتلانتیک شمالی و ریسک گردباد اروپایی ۵۰ میلیون دلاری با شرکت بیمه سویس ری است. از آنجا که مرجع ریسک این نوع از سوپ‌ها براساس پرتفوی ریسک طرفین قرارداد است، جبران زیان‌محورند (کامینز، ۲۰۰۸).

فرض کنید S و λ به ترتیب، خسارت و نوسان خسارت‌اند که تغییرات آن‌ها از مدل خسارت^۲ تبعیت می‌کند، در این صورت سوپ فاجعه به‌نسبت زمان، خسارت و نوسانات آن تغییر می‌کند که با $c(t, s, \lambda)$ نمایش داده شده است. از این رو، تغییرات طبق دستور ایتو به صورت زیر خواهد بود:

$$dc = \left(c_t + \alpha c_s + \mu \lambda c_\lambda + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 c_{ss} + \frac{1}{2} \nu^2 \lambda^2 c_{\lambda\lambda} + \rho \sigma \nu \lambda c_{s\lambda} \right) dt + (\nu \lambda c_\lambda + \sigma c_s) dw_t + [c(t, s + ce^\lambda \eta, \lambda) - c(t, s, \lambda)] dN \quad (3)$$

با قرار دادن

$$\varphi = c_t + \sigma c_s + \mu \lambda c_\lambda + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 c_{ss} + \frac{1}{2} \nu^2 \lambda^2 c_{\lambda\lambda} + \rho \sigma \nu \lambda c_{s\lambda} \quad (4)$$

¹. Natural Catastrophe Swaps (SNaCs™)

². Pure Risk Swap or Portfolio Swap

³. Catastrophic Risk Exchange (CATEX)

⁴. Mitsui Sumitomo Insurance

$$\Delta = \gamma \lambda c_{\lambda} + \sigma c_s$$

خواهیم داشت:

$$dc = \phi dt + \Delta dw_t + [c(t, s + ce^{\lambda} \eta, \lambda) - c(t, s, \lambda)] dN$$

(۵)

اکنون با استفاده از تعمیم روش مدل سازی بلک و شولز مدلی برای سواپ فاجعه با استفاده از مفهوم سبد ارائه می شود. فرض کنید که π یک سبد شامل دو سواپ فاجعه (برای نمونه زلزله، C_1 و سیل، C_2) باشد، لذا ارزش سبد به صورت زیر خواهد بود:

$$\pi = x_1 C_1 + x_2 C_2 \quad (۶)$$

که در آن x_1 حجم سواپ فاجعه زلزله و x_2 حجم سواپ فاجعه سیل در سبد است. برای رسیدن به مدل موردنظر، تغییرات سبد را حساب می کنیم:

$$d\pi = x_1 dc_1 + x_2 dc_2 \quad (۷)$$

$$dc_i = \phi_i dt + \Delta_i dw_t + [c_i(t, s + ce^{\lambda} \eta, \lambda) - c_i(t, s, \lambda)] dN, i=1,2$$

با در نظر گرفتن دارایی های سبد π با نرخ بهره r و با فرض سبد ریسک خنثی، بازده احتمالی را به صورت زیر در نظر می گیریم (بیورک، ۲۰۰۹):

$$d\pi = r\pi dt \quad (۸)$$

که در آن r نرخ بهره است.

با استفاده از عملیات پیچیده ریاضی و با استفاده از الگوی روش مدل سازی نیسی و سلمانی (۲۰۱۳) و با جای گذاری رابطه ۷ در رابطه ۸ قسمت تصادفی آن حذف و نسبت زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{\phi_1 - (r + \lambda)c_1 + \lambda E[c_1(t, s + ce^{\lambda} \eta, \lambda)]}{\Delta_1} = \frac{\phi_2 - (r + \lambda)c_2 + \lambda E[c_2(t, s + ce^{\lambda} \eta, \lambda)]}{\Delta_2} \quad (۹)$$

این نسبت را قیمت بازاری ریسک^۱ می نامند و در اینجا آن را با q نشان می دهیم. در روند ساخت سبد انتخاب نوع ورقه اختیاری است، لذا برای تمامی ورقه ها، چون مدل تصادفی آن ها از یک روند پیروی می کند، این الگو برقرار است. با ادامه روند مدل سازی، معادله دیفرانسیل انتگرال جزئی زیر به دست خواهد آمد (آنگر، ۲۰۱۰):

$$c_t + (\alpha s - q \sigma s) c_s + (\mu \lambda - q \gamma \lambda) c_{\lambda} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 c_{ss} + \frac{1}{2} \gamma^2 \lambda^2 c_{\lambda\lambda} + \rho \sigma \gamma \lambda c_{\gamma\lambda} + J - (r + \lambda) c = 0$$

(۱۰)

که در آن

$$J = \lambda \int_0^{\infty} c(t, s + ce^{\lambda} \eta, \lambda) f(ce^{\lambda} \eta) d\eta$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5 \left(\frac{\ln x - \lambda}{\gamma} \right)^2}$$

(۱۱)

که λ میانگین و γ واریانس داده ها است.

برای حل مدل فوق، شرایط نهایی و مرزی به صورت زیر لازم است:

$$C(T, s, \lambda) = \begin{cases} B_{fix} & s < Z \\ 0 & s \geq Z \end{cases}$$

^۱. قیمت بازاری ریسک از عواملی است که در فرایند قیمت گذاری مطالبات مشروط ظاهر می شود.

که Z در آن آستانه است.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} c(t, s, \lambda) = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c(t, s, \lambda) = (B_{fix} * e^{-rt}) I_{s < Z} \quad (12)$$

در اینجا $I_{s < Z}$ تابع مشخصه است، با قراردادن یک بار $\lambda = 0$ و یک بار دیگر $s = 0$ در مدل اصلی، شرایط مرزی به صورت زیر تکمیل خواهد شد:

$$c_t + (\mu\lambda - q\gamma\lambda)c_\lambda + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2 c_{\lambda\lambda} + J - (r + \lambda)c = 0 \quad s \rightarrow 0;$$

$$c_t + (\alpha s - q\sigma s)c_s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 c_{ss} - (r)c = 0 \quad \lambda \rightarrow 0;$$

روش حل

در این بخش، روشی عددی برای حل مدل قیمت گذاری ارائه می شود. برای این منظور، از روش تفاضلات متناهی نیمه گسسته سازی استفاده خواهد شد، لذا برای بالا بردن دقت هم گرایی، ابتدا s و λ گسسته سازی می شوند و به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان می رسیم، سپس معادله با روش اویلر حل خواهد شد. برای رسیدن به این هدف، بازه تغییرات s و λ را، به ترتیب، به صورت $[0, s_{max}]$ و $[0, \lambda_{max}]$ ، که در آن s_{max} و λ_{max} از داده های بازار و شرکت های بیمه ای حاصل شده اند، نشان می دهیم. بازه های $0 < s < s_{max}$ و $0 < \lambda < \lambda_{max}$ به صورت زیر گسسته سازی می شوند:

$$0 < s_0 < s_1 < s_2 \dots < s_{max}$$

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots < \lambda_{max}$$

معادله دیفرانسیل انتگرال جزئی ۱۰، به همراه شرایط اولیه و مرزی اشاره شده، مسئله مقدار اولیه و مرزی است، که در اینجا مدل نوین سواپ فاجعه مبتنی بر مدل های تصادفی نامیده می شود. از آنجا که مسئله مقدار اولیه و مرزی جواب دارد (فلورسکیو و همکاران^۱، ۲۰۱۲) نتیجه می دهد که مدل نوین سواپ به دست آمده نیز جواب یکتا دارد. اما این مدل جواب بسته و تحلیلی ندارد و باید تخمینی از جواب به وسیله روش های عددی به دست بیاید، که در این مقاله روش تفاضلات متناهی انتخاب شده است.

در ادامه، با فرض $\tau = T - t$ ، معادله ۱۰ به صورت زیر تبدیل می شود. تغییر متغیر $\tau = T - t$ و $C(t, s, \lambda) = U(\tau, s, \lambda)$ برای احراز یکی از شرایط هم گرایی است، از این رو با در نظر گرفتن عبارت زیر:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial C}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial s}, \quad \frac{\partial C}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial s \partial \lambda} = \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \lambda}$$

PDE زیر را به دست خواهیم آورد:

$$U_\tau = g_1(s)U_s + g_2(\lambda)U_\lambda + g_3(s)U_{ss} + g_4(\lambda)U_{\lambda\lambda} + g_5(s, \lambda)U_{s\lambda} + J + g_6(\lambda)U \quad (13)$$

که در آن $g_i, i \in \{1, \dots, 6\}$ ضرایباند و

$$J = \lambda \int_0^x U(\tau, s + ce^{\lambda\eta}, \lambda) f(ce^{\lambda\eta}) d\eta \quad (14)$$

شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر است:

$$U(0, s, \lambda) = \begin{cases} B_{fix} & s < Z \\ 0 & s \geq Z \end{cases}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} U(\tau, s, \lambda) = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} U(\tau, s, \lambda) = (B_{fix} * e^{-r(T-\tau)}) I_{s < Z} \quad (15)$$

که در آن $I_{s < Z}$ تابع مشخصه است.

اکنون، معادله دیفرانسیل انتگرال جزئی ۱۳ به صورت زیر نوشته می شود:

$$U_\tau = \mathfrak{I}_d U + \mathfrak{I}_j U \quad (16)$$

¹. Florescu et al.

که در آن:

$$\mathfrak{I}_d U = g_1(s)U_s + g_2(\lambda)U_\lambda + g_3(s)U_{ss} + g_4(\lambda)U_{\lambda\lambda} + g_5(s, \lambda)U_{s\lambda} + g_6(\lambda)U \quad (17)$$

$$\mathfrak{I}_j U = J \quad (18)$$

حال با فرض $u_{i,j} = U(\tau, s_i, \lambda_j)$ و با استفاده از روش تفاضلات متناهی خواهیم داشت:

$$U_s \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2ds}, U_\lambda \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2d\lambda}, U_{ss} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(ds)^2} \quad (19)$$

$$U_{\lambda\lambda} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(d\lambda)^2}, U_{s\lambda} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4d\lambda ds}$$

فرض کنید:

$$u = [u_{1,1} \quad \cdots \quad u_{1,M-1} \quad \cdots \quad u_{N-1,1} \quad \cdots \quad u_{N-1,M-1}]^{Tr}. \quad (20)$$

با استفاده از مفروضات فوق، ماتریس A و B طوری در نظر گرفته می شود که عملگر ۱۹ را توجیه کند.

$$\mathfrak{I}_d U \rightarrow Au + B \quad (21)$$

ماتریس A به ماتریس تنک (پراکنده)^۱ معروف است که، با توجه به گسسته سازی ۲۱ و بردار B، شرایط مرزی را دارد و به راحتی با استفاده از روش هیرسا^۲ (۲۰۱۲) به دست می آید.

همچنین با در نظر گرفتن $x = s + e^{\lambda} \eta$ و $f_{i,j} = f(s_i - s_j)$ برای قسمت انتگرالی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\square e^{\lambda_j}} \int_0^\infty U(\tau, x, \lambda_j) f(x - s_i) dx \approx \frac{1}{\square e^{\lambda_j}} \frac{ds}{2} \left[f_{i,0} u_{0,j} + f_{i,N} u_{N,j} + 2 \sum_{p=1}^{N-1} f_{i,p} u_{p,j} \right] \quad (22)$$

عملگر انتگرال ماتریس F و G نیز به صورت زیر است:

$$\mathfrak{I}_j U \rightarrow Fu + G \quad (23)$$

با توجه به رابطه های ۱۹ و ۲۰ عملگر $\mathfrak{I}$ به شکل زیر در نظر گرفته می شود:

$$\mathfrak{I} =: \mathfrak{I}_d + \mathfrak{I}_j \quad (24)$$

که در آن:

$$\mathfrak{I}u = \Phi u + \Psi \quad (25)$$

$$\Phi = A + F, \Psi = B + G$$

در نهایت، معادله دیفرانسیل معمولی زیر به دست می آید:

$$u_\tau = \Phi u + \Psi \quad (26)$$

$$u(0) \leftrightarrow U(0, s, \lambda)$$

و با روش اویلر حل می شود.

نتایج عددی

در این قسمت، با استفاده از روش حل بیان شده در بخش گذشته، مدل اجرا می شود. بدین منظور از داده های خسارت ناشی از زلزله در مقاله ورناس و پیلکه (۲۰۰۹) از سال ۱۹۰۰ تا ۲۰۰۵ استفاده و پارامترها تخمین زده خواهد شد. در این مقاله، خسارتها براساس نرخ تورم، ثروت و جمعیت، نرمال سازی شده است. در ادامه و برای نمایش بهتر نتایج، نسبتی برای داده ها در بازه [0,10] در نظر گرفته می شود و در خسارت های زلزله در دوره زمانی فوق، اعمال خواهد شد.

¹. Sparse Matrix

². Hirsu

تخمین پارامتر

در این بخش، روشی برای تخمین پارامترها ارائه می شود. داده های زیر مفروض است:

$$s(t_0), \dots, s(t_n) \quad (27)$$

که در آن $s(t_i)$ قیمت دارایی در لحظه t_i است. به منظور تخمین σ از این واقعیت بهره می بریم که S توزیعی لگ- نرمال دارد، بنابراین $\xi_1, \dots, \xi_n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم (بیورک، ۲۰۰۹):

$$\xi_i = Ln \left(\frac{s(t_i)}{s(t_{i-1})} \right) \quad (28)$$

نظر به اینکه متغیرهای تصادفی $\xi_1, \dots, \xi_n$ مستقل و با توزیع نرمال اند، داریم (بیورک، ۲۰۰۹):

$$E[\xi_i] = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt \quad (29)$$

$$\text{var}[\xi_i] = \sigma^2 dt \quad (30)$$

سرانجام، با حل دستگاه فوق، پارامترهای α و σ به دست خواهد آمد.

برای به دست آوردن پارامترهای λ ، با توجه به گسسته سازی زمان، از ایده عزیزی و نیسی (۲۰۱۸) بهره می گیریم. با فرض اینکه λ_i مقدار شدت از زمان t_0 تا t_i است، مجموعه ای از داده های مربوط به شدت تشکیل خواهد شد و با تکرار روش فوق، مقادیر μ و γ تعیین می شود.

برآورد مدل

در برآورد مدل، مقادیر پارامترها براساس داده های تجربی، که یک مؤلفه تصادفی دارند، اندازه گیری می شود. در این بخش با استفاده از روش تخمین فوق، پارامترهای مدل را مقداردهی می کنیم و به اجرای عددی آن می پردازیم؛ از این رو مقادیر زیر به دست می آید:

جدول ۲: مقدار عددی متغیرهای مدل

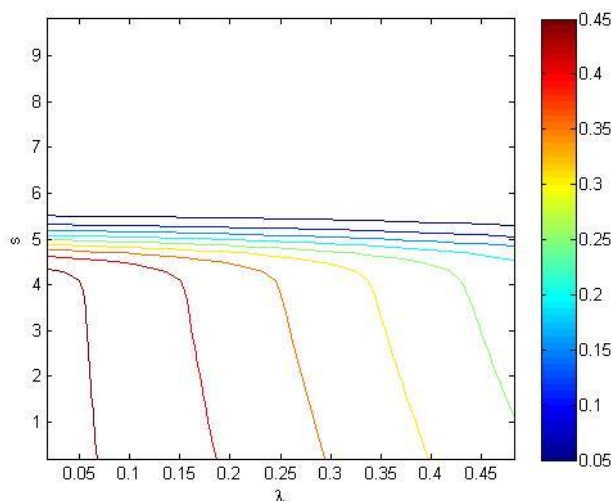
مقدار	متغیر (پارامتر)
۰/۳۸۳۵	α
۰/۷۶۶۹	σ
۹/۰۲۲۶e-۰۵	μ
۰/۰۰۱۹	γ
۲/۵	$\mathbb{C}$
[۰/۰۵]	$[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$
۵۰	N
۳۰	M
۱	T
۰/۰۱	dt
۰/۵	q
۲/۴۵	χ
۱/۱۱	ν

منبع: یافته های تحقیق

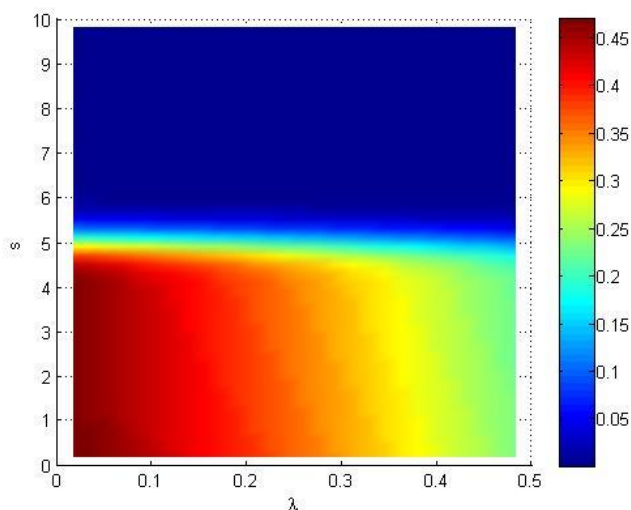
با توجه به مجموعه داده های پیلکه، آستانه مورد نظر مسئله، مقدار ۴/۸۷۷۶ فرض شده و پرداختی های ثابت تعدیل شده در زمان سررسید، مقدار ۰/۵ در نظر گرفته شده است.

مدل سازی قیمت سوپ فاجعه با شدت وقوع تصادفی

بعد از اجرای مدل با استفاده از نرم افزار متلب، نمودارهای زیر، که بیانگر قیمت سوپ فاجعه از لحظه شروع قرارداد است، در دسترس خواهند بود:

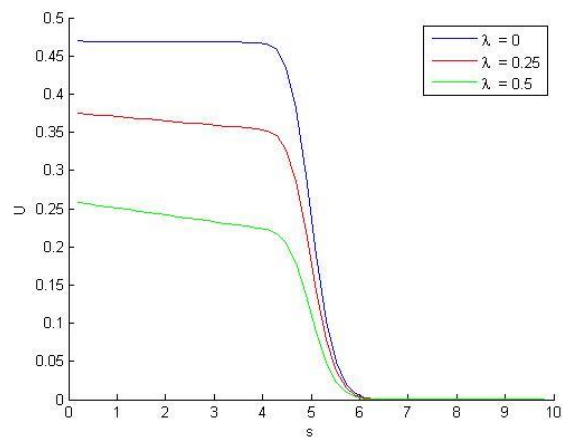


نمودار ۱: الف) قیمت سوپ فاجعه در لحظه صفر

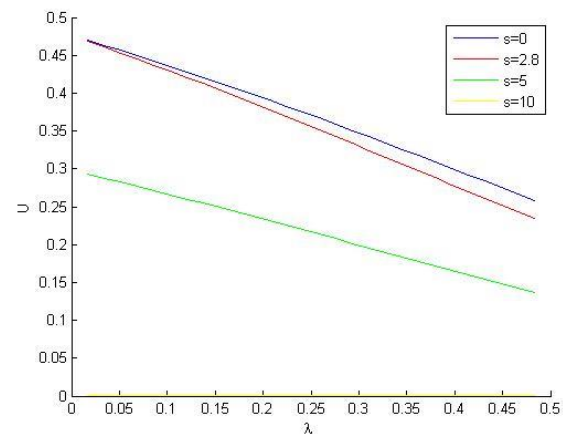


نمودار ۱: ب) کانتور قیمت سوپ فاجعه در لحظه صفر

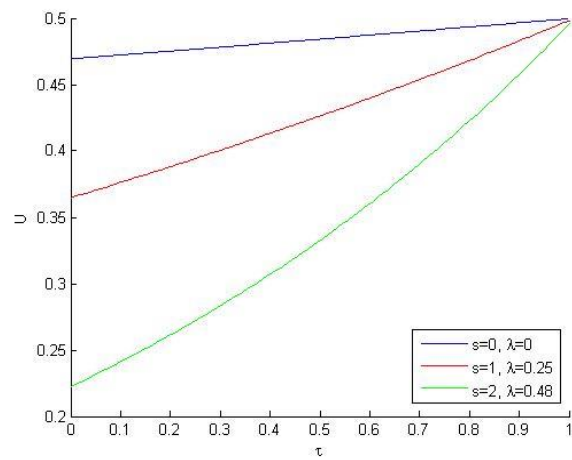
در نمودار فوق، محور افقی λ و محور عمودی خسارت است. قیمت سوپ فاجعه متناسب با رنگ نمودار با توجه به نوار کنار نمودار تعیین می شود. در واقع با در نظر گرفتن λ و خسارت، مختصات نقطه مدنظر را در نمودار فوق پیدا می کنیم و رنگ مدنظر در آن نقطه را با نوار کناری قیاس می کنیم؛ مقدار آن مشخص خواهد شد. برای بررسی رفتار قیمت سوپ، نمودار فوق از منظرهای مختلف به صورت زیر نمایش داده می شود:



نمودار ۲: قیمت سواپ نسبت به خسارت با λ ثابت در $t=0$



نمودار ۳: قیمت سواپ نسبت به λ با خسارت ثابت در $t=0$



نمودار ۴: قیمت سواپ به ازای سه مقدار برای λ و خسارت در طول زمان قرارداد

همان‌طور که از نمودار ۲ پیداست قیمت سواپ با افزایش مقدار خسارت کاهش می‌یابد و این کاهش در حول آستانه بسیار زیاد است، همچنین از نمودار ۳ می‌توان دریافت که با افزایش λ یا به عبارتی دیگر بالا رفتن احتمال و شدت وقوع خسارت، قیمت سواپ روند نزولی دارد و تغییرات آن بسیار ملموس است.

در نمودار ۴، می‌توان قیمت سواپ را به‌ازای مقادیر تعیین‌شده در زمان‌های مختلف مشاهده کرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به‌ازای مقادیر ثابت برای λ و خسارت، قیمت سواپ فاجعه با پرداختی‌های ثابت هم‌گراست، مثلاً زمان ۱ یا همان سررسید قیمت سواپ با قیمت پرداختی‌های ثابت منطبق است، که این همان تسویه‌حساب در زمان سررسید است. از دیدگاه ریاضیات احتمال هرچه به زمان سررسید نزدیک‌تر می‌شویم، یا به عبارتی دیگر فاصله با سررسید کم شود، احتمال وقوع خسارت نیز کمتر خواهد شد و قیمت سواپ با پرداختی‌های ثابت برابر می‌شود.

جمع‌بندی و پیشنهادها

در این مقاله، تحلیل جامعی از سواپ حوادث فاجعه، که ابزاری نسبتاً جدید در حوزه مالی است، ارائه شده است. در ابتدای پژوهش، بحث مختصری از طراحی قرارداد معمول، وضعیت کنونی بازار و حوزه‌های عمده کاربرد ارائه شد. سپس سواپ فاجعه مدل‌سازی شد و با استفاده از روش‌های عددی، قیمت‌گذاری شد. از آنجایی که یکی از مهم‌ترین اهداف این پژوهش مدل‌سازی سواپ فاجعه با فرض تغییرپذیر بودن شدت و تکرار وقوع خسارت است، مدلی جدید و دوفاکتوره برای خسارت ارائه شد. در واقع هدف از ارائه این مدل جدید، دخالت مستقیم شدت و احتمال وقوع خسارت در مقدار خسارت است، به عبارتی دیگر، به جای C در مدل ۱ از Ce^{λ} استفاده شد و λ طوری در نظر گرفته شد که هر لحظه، تصادفی، تغییر کند، بنابراین، شدت از دیدگاه ریاضیات احتمال، مقدار ثابتی ندارد و از یک فرایند تصادفی براونی هندسی تبعیت می‌کند، که با خسارت هم‌بستگی دارد و این دیدگاه در مدل خسارت را می‌توان وجه‌تمایز آن با مدل خسارت آنگر به شمار آورد. با در نظر گرفتن این مدل خسارت، مدل‌سازی مشتقه سواپ فاجعه انجام شد و یک معادله دیفرانسیل انتگرال جزئی به دست آمد. بعد از آن، با نیمه‌گسسته‌سازی، معادله دیفرانسیل انتگرال جزئی به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شد و با روش تکراری اویلر، قیمت‌گذاری انجام گردید. سرانجام، با استفاده از نرم‌افزار متلب، نتایج به صورت نمودار نشان داده شد.

ازجمله نتایج این پژوهش این است که قیمت سواپ فاجعه با رشد خسارت و رشد شدت رابطه عکس دارد. همچنین با توجه به نمودار کانتور می‌توان دریافت که روند قیمت به‌ازای خسارت کمتر از آستانه، روند منظمی دارد و این تغییرات متناسب با تغییرات خسارت و شدت است. نظر به اینکه مدل خسارت جدید ارائه‌شده در مقاله از فرایندی تصادفی تبعیت می‌کند و نوسان جزء لاینفک وقوع حوادث و بازارهای مالی در ایران است، توصیه می‌شود، در پژوهشی کاربردی، داده‌های زلزله در ۱۰۰ سال اخیر در ایران جمع‌آوری شود و براساس شاخص‌های تورم و جمعیت، نرمال‌سازی و با روش‌های حل ارائه‌شده در مقاله اجرا شود. به‌علاوه، استفاده از این مدل برای قیمت‌گذاری سایر ابزارهای حوادث با استاندارد پایین‌تر مانند بیمه اتکایی و اوراق قرضه فاجعه نیز پیشنهاد می‌شود. با عنایت به گسترده بودن رویکرد مدل‌سازی و قیمت‌گذاری، می‌توان، با استفاده از نرخ بهره تصادفی، قیمت‌گذاری سواپ فاجعه را نیز قیمت‌گذاری کرد و در آخر به‌سبب اینکه قراردادهای سواپ در خارج از بورس ارائه می‌شود و ریسک اعتباری دارد، می‌توان در تحقیقات بعدی، ریسک اعتباری را به مدل افزود.

منابع و مآخذ

عسکری فیروزحایی، احسان و ساده‌وند، محمدجواد (۱۳۹۳). اوراق بهادارسازی بیمه (ویرایش اول). تهران: بورس اوراق بهادار تهران.
نیسی، عبدالساده و سلمانی قرائی، کامران (۱۳۹۷). مهندسی مالی و مدل‌سازی بازارها با رویکرد نرم‌افزار MATLAB. تهران: دانشگاه علامه طباطبائی.

Aase, K.K., (2001). A markov model for the pricing of catastrophe insurance futures and spreads. Journal of Risk and Insurance, 68(1), 25-49.

Azizi, S.M.E.P.M.; Neisy, A., (2018). A new approach in geometric brownian motion model. In: Cao BY. (eds) Fuzzy Information and Engineering and Decision. Advances in Intelligent Systems and Computing. 336-42.

Biagini, F.; Bregman, Y.; Meyer-Brandis, T., (2008). Pricing of catastrophe insurance options Written on a Loss Index with Reestimation. Insurance. Mathematics and Economics, 43(2), 214-22.

Bjork, T., (2009). Arbitrage Theory in Continuous Time, 3rd ed. Oxford University Press.

- Borden, S.; Sarkar, A., (1996). Securitizing Property Catastrophe Risk. *Current Issues in Economics and Finance*, 2(9), 1–6.
- Braun, A., (2011). Pricing Catastrophe Swaps: A Contingent Claims Approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 49(3), 520-36.
- Campbell, J.Y.; Cochrane, J.H., (1999). By force of habit: A consumption-base Explanation of Aggregate Stock Market Behavior. *Journal of Political Economy*, 107(2), 205–51.
- Canter, M.S.; Cole, J.B.; Sandor, R.L., (1997). Insurance derivatives: A new asset class for the capital markets and a new hedging tool for the insurance industry. *Applied Corporate Finance*, 10(3), 69–81.
- Chang, C.W.; Chang, J.S.K.; Yu, M.T., (1996). Pricing catastrophe insurance futures call spreads. *Risk and Insurance*, 63(4), 599-617.
- Chang, C.W.; Chang, J.S.; Lu, W., (2008). Pricing catastrophe options in discrete operational time. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43(3), 422-30.
- Chang, C.W.; Chang, J.S.; Lu, W., (2010). Pricing catastrophe options with stochastic claim arrival intensity in claim time. *Banking & Finance*, 34(1), 24-32.
- Cox, J.C.; Ingersoll, Jr.J.E.; Ross, S.A.; (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407.
- Cummins, J.D., (2008). CAT bonds and other risk-linked securities: state of the market and recent developments. *Risk Management and Insurance Review*, 11(1), 23–47.
- Cummins, J.D.; Geman, H., (1994). An Asian option approach to the valuation of insurance futures contracts. *Review of Futures Markets*, 13(2), 517–57.
- Cummins, J.D.; Geman, H., (1995). Pricing catastrophe insurance futures and call spreads: an arbitrage approach. *Journal of Fixed Income*, 4(4), 46–57.
- Cummins, J.D.; Weiss, M.A., (2009). Convergence of insurance and financial markets: Hybrid and securitized risk-transfer solutions. *Risk and Insurance*, 76(3), 493-545.
- Dieckmann, S., (2009). By force of nature: explaining the yield spread on catastrophe bonds Working Paper, University of Pennsylvania, finance department.
- Deutsche Bank., (2006). Deutsche Bank launches Event Loss Swaps to help clients hedge against disasters. Retrieved from: http://www.db.com/presse/en/content/press_releases_2006_3263.htm.
- Egami, M.; Young, V.R., (2008). Indifference prices of structured catastrophe (CAT) bonds. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2), 771–78.
- Florescu, I.; Liu, R.; Mariana, M.C., (2012). Solutions to a partial integro-differential parabolic system arising in the pricing of financial options in regime-switching jump diffusion models. *Electronic Journal of Differential Equations*, 231, 1–12.
- Forrester, J.P., (2008). Insurance risk collateralized debt obligations. *Structured Finance*, 14 (1), 28–32.
- Geman, H.; Yor, M., (1997). Stochastic time changes in catastrophe option pricing. *Insurance: Mathematics and Economics*, 21(3), 185–93.
- Härdle, W.K.; Cabrera, B.L., (2010). Calibrating CAT bonds for Mexican earthquakes. *Risk and Insurance*, 77(3), 625-50.
- Hirsa, A., (2012). *Computational Methods in Finance*, Chapman and Hall/CRC. Financial Mathematics Series, Taylor & Francis, CRC Press: 1 edition.
- Investopedia., (2019). TRADING, TRADING STRATEGY, Negative Basis Trades, Mar 13. Retrieved from: <https://www.investopedia.com/articles/trading/08/negative-basis-trades.asp>
- Jarrow, R.A.; Yu, F., (2001). Counterparty risk and the pricing of defaultable securities. *The Journal of Finance*, 56(5), 1765–99.
- Lane, M.N., (2000). Pricing risk transfer transactions. *Astin Bulletin*, 30(2), 259–93.
- Lane, M.; Mahul, O., (2008). Catastrophe risk pricing: an empirical analysis. International Bank for Reconstruction and Development, The World Bank.
- Lee, J.P.; Yu, M.T., (2007). Valuation of catastrophe reinsurance with catastrophe bonds. *Insurance:*

- Mathematics and Economics, 41(2), 264-78.
- Muermann, A., (2008). Market price of insurance risk implied by catastrophe derivatives. North American Actuarial Journal, 12(3), 221-27.
- Neisy, A.; Salmani, K., (2013). An inverse finance problem for estimation of the volatility. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 53(1), 63–77.
- Pielke Jr, R.A.; Gratz, J.; Landsea, C.W.; Collins, D.; Saunders, M.A.; Musulin, R., (2008). Normalized hurricane damage in the United States: 1900–2005. Natural Hazards Review, 9(1), 29-42.
- Swiss Re., (2009). The Role of Indices in Transferring Insurance Risk to the Capital Markets. Sigma, 4, Zurich, Switzerland.
- Unger, A.J.A., (2010). Pricing index-based catastrophe bonds: Part 1: Formulation and discretization issues using a numerical PDE approach. Computers & Geosciences, 36(2), 139-49.
- Vickery, P.J.; Skerlj, P.F.; Lin, J.; Twisdale Jr, L.A.; Young, M.A.; Lavelle, F.M., (2006). HAZUS-MH Hurricane model methodology. II: Damage and loss estimation. Natural Hazards Review, 7(2), 94–103.
- Vranes, K.; Pielke Jr, R., (2009). Normalized earthquake damage and fatalities in the United States: 1900–2005. Natural Hazards Review, 10(3), 84-101.
- Wu, Y.C.; Chung, S.L., (2010). Catastrophe risk management with counterparty risk using alternative instruments. Insurance: Mathematics and Economics, 47(2), 234-45.
- Xu, Y., (2016). A Study of the Loss Distribution of Natural Disasters in Norway Comparing a Common Model with a Model Broken Down into Catastrophe Types. University of Oslo Library.
- Young, V.R., (2004). Pricing in an incomplete market with an affine term structure. Mathematical Finance, 14(3), 359–81.
- Zolfaghari, M.R.; Campbell, K.W., (2008). A new insurance loss model to promote catastrophe insurance market in India and Pakistan. The 14th World Conference on Earthquake Engineering, October 12-17, Beijing, China.